La fonction zêta d'Epstein est une généralisation multidimensionnelle de la fonction zêta de Riemann : à un réseau euclidien L de dimension n on associe la série

$$\zeta(L,s) := \sum_{x \in L-\{0\}} ||x||^{-2s},$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ et admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{n}{2}\right\}$.

On s'intéresse aux réseaux qui, à $s > 0$ fixé ($s \neq \frac{n}{2}$), minimisent $\zeta(L,s)$. Cette question, qui est liée à la question plus classique de la détermination des empilements de sphères réguliers les plus denses, apparait assez naturellement dans des contextes variés (géométrie, physique).

Dans un article récent (INVENT. MATH. 165 (2006), no. 1, 115–151), Sarnak et Strömbergsson montrent que les réseaux de racines $\mathbb{D}_4$ et $\mathbb{E}_8$, ainsi que le réseau de Leech Λ_{24}, réalisent un minimum local strict de $\zeta(L,s)$ pour tout $s > 0$ ($s \neq \frac{n}{2}$).

Nous proposons une nouvelle preuve de ce résultat, conceptuellement plus simple, basée sur la notion de design sphérique. En outre, notre approche permet d'étendre le théorème de Sarnak et Strömbergsson à toute une famille de réseaux (les "réseaux modulaires extremaux"), *via* des travaux de Bachoc et Venkov.