

BILAN SUCCINCT DE L'ACTIVITE SCIENTIFIQUE 2005-2009 PAR THEME

1. METHODES MATHÉMATIQUES EN MODELISATION DES MATERIAUX DE STRUCTURES DES FLUIDES (M4SF)

En 2005-2008 une des **directions principales** de recherche du thème était le développement de la **méthode de décomposition asymptotique partielle de domaines** (MAPDD), proposée dans l'article G.Panasenko "Method of asymptotic partial decomposition of domain", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences ,v. 8, No 1,1998, 139-156. L'idée principale est l'extraction d'un domaine de couche limite et la simplification (normalement la réduction de la dimension) du domaine dans lequel la solution a un comportement régulier. A l'interface, on impose des conditions spéciales. Elles servent de liaison entre les sous domaines de la décomposition et doivent être satisfaites par la solution asymptotique. Cette méthode peut être appliquée aux problèmes divers de la conductivité thermique et de la diffusion, d'élasticité, posés dans des domaines minces, par exemple, dans des structures, considérées comme une union connexe de cylindres fins dont le diamètre et la longueur sont dans un rapport de l'ordre de $\mu \ll 1$ (ce rapport est un paramètre de petite taille) [OS1]. Dans ce cas on remplace le problème 3D ou 2D par un problème hybride de dimension combinée : 3D-1D, 3D-2D ou 2D-1D, i.e. on réduit la dimension dans les sous- domaines où la solution a un comportement régulier et on garde la dimension d'origine là où elle a un comportement type couche limite. Les principes de construction des conditions à l'interface sont formulés dans [OS1]. On obtient donc ce problème hybride partiellement décomposé. C'est un modèle multi-échelle avec un zoom sur les domaines de comportement singulier. La version « éléments finis » de la MAPDD est étudiée dans [ACL 62], et la version "volumes finis" dans [ACL 116], où une estimation d'erreur en fonction de pas du maillage et de petit paramètre a été obtenue .

Les problèmes spectraux pour des structures minces traités par la MAPDD sont considérés dans [ACL 114] (à notre connaissance, c'est la première étude de la MAPDD appliquée aux structures minces).

La MAPDD est généralisée dans le cas d'un **écoulement dans une structure mince tubulaire**. C'est un **problème modèle** de la simulation de la **circulation de sang** dans le corps. L'idée est de réduire la dimension du modèle dans les parties régulières des vaisseaux et de coupler ces modèles de dimension réduite avec des modèles 3D ou 2D dans des parties singulières (bifurcations, sténose, etc). On considère le problème de **Navier-Stokes** ou des **fluides micropolaires** dans une union connexe de cylindres fins dont le diamètre et la longueur sont dans un rapport de l'ordre de $\mu \ll 1$). La MAPDD est appliquée et justifiée dans le cas d'écoulement dans un canal mince à **paroi élastique** aux conditions « inflow/outflow » périodiques [ACL 119] ou vitesse donnée [ACL 118],[ACL 115]; l'écoulement d'un fluide micro-polaire dans un canal mince courbé [ACL 53] . Les résultats théoriques de l'analyse asymptotique sont confrontés aux résultats des calculs numériques [ACL 9], [ACL 115], [ACL 47]. Ces essais numériques montrent une bonne précision de cette méthode. Ces travaux sont développés en co-opération avec D.Dupuy (ancienne doctorante et aujourd'hui ingénieur à l'Ecole des Mines de Saint Etienne) et avec la directrice de recherche de l'Institut de Mathématiques de l'Académie de Roumanie R.Stavre dans le cadre des projets EURROMAT, MJHJD85312 et du PICS CNRS avec la Russie (circulation du sang, parois élastique).

L'analyse mathématique des **fluides non-newtoniens** est développée dans les travaux de V.Busuioc : existence et unicité de solution pour l'écoulement de troisième degré, stabilité des solutions, fluides non-newtoniens aux conditions de bord de type Navier [ACL 43]-[ACL 45].

Une autre application de la **MAPDD** est le problème du **transfert radiatif stellaire**.

Ce problème est modélisé par une **équation intégrale sur un grand intervalle**. L'approche de MAPDD nous permet de proposer un code intelligent qui évalue la grandeur de l'intervalle d'intégration (sa longueur peut aller jusqu'au 10 puissance 29) et en fonction de cette grandeur applique la méthode plus rapide. Ce travail est effectué en collaboration avec B.Rutilly (Centre de recherche

astronomique de Lyon), avec A.Amosov (Moscou) [ACL 11]. Le cas de deux petits paramètres (l'inverse de l'intervalle d'intégration et la distance entre l'albédo et 1) est considéré dans [ACL 10].

La méthode **de l'homogénéisation partielle** [OS1], Chapitre 6, (version de la décomposition asymptotique aux modèles des milieux hétérogènes) est proposée et justifiée pour des équations aux coefficients fortement oscillants. Ces équations modélisent des champs physiques dans les matériaux composites. La méthode proposée garde l'équation de départ dans un sous domaine mince, elle prévoit l'homogénéisation d'ordre élevé dans la partie restante du domaine et elle prescrit les conditions de l'interface appropriées pour la partie homogénéisée et la partie non homogénéisée. Les **modèles semi-discrets, semi-continus** sont étudiés dans [ACL 113], [ACL 23]. Cette approche est importante pour la modélisation des **revêtements nano-structurés** et de la croissance des **structures biologiques**, par exemple, des arbres. Elle est développée dans le cadre du projet « Thématiques Prioritaires » de la Région Rhône-Alpes « Modélisation Multi-échelle des Nano-structures » (2004-2006) en collaboration avec l'Université de Grenoble et l'Université de Lyon 1. Une doctorante Marthe Bétoué Etouhé a été encadrée dans ce projet.

Les applications à la **modélisation statistique en biologie** ont été développées par M. Réhailia : il co-dirige une thèse franco-algérienne sur les modèles semi-markoviens pour l'analyse de la maladie du sommeil et de pathologies similaires. Ce travail a donné lieu aux publications [ACL 13],[ACL 93].

Un nouveau résultat sur des **modèles** des plaques hétérogènes **d'ordre élevé** (type Cosserat, **Tupin, Mindlin**) est obtenu dans [ACL 111]. La technique d'homogénéisation d'ordre élevé mène à l'équation homogénéisée d'ordre élevé, (cf. le livre N.Bakhvalov, G.Panasenko, «Homogenisation : Averaging Processes in Periodic Media », Kluwer, Dordrecht/London/Boston, 1989). Ses coefficients ont été largement discutés dans la littérature de la mécanique des composites parce qu'ils sont liés aux théories des gradients des déformations d'ordre élevé. Néanmoins, la nature mathématique de cette équation n'a pas été complètement éclaircie et les conditions aux limites asymptotiquement exactes n'ont pu être définies. Dans le cas d'un problème posé dans l'espace (sans conditions au bord) une approche variationnelle a été appliquée par V.P.Smyshlyaev et son collaborateur K.Cherednichenko (J.Mech.Phys.Solids 48 (2000) 1325-1357) mais la question de trouver les conditions au bord d'ordre élevé dans le cas d'un problème aux limites a été ouverte. Dans [ACL 111] la formulation variationnelle du problème homogénéisée d'ordre élevé est donnée. Cette formulation est dérivée par la projection du problème initial sur l'espace du développement asymptotique. Elle engendre les conditions aux limites appropriées pour l'équation homogénéisée d'ordre élevé. L'estimation de la différence entre la solution exacte et la solution approchée est obtenue.

L'équation KZK (**Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov**) de l'acoustique non linéaire aux coefficients variables a été étudiée en collaboration avec I.Kostin. C'est la première étude mathématique de cette équation (indépendamment, cette équation a été aussi étudiée par C. Bardos et A. Rozanova). Les théorèmes de l'existence globale et de l'unicité de solution ont été prouvés. Dans le cas des coefficients oscillants cette équation modélise **la propagation d'ondes dans un milieu stratifié**; l'équation homogénéisée est obtenue et justifiée. Ces résultats ont été annoncés dans [ACL 94] et la version complète a été publiée dans SIAM [ACL 95]. Un autre modèle de l'acoustique non linéaire, l'équation de **Burgers intégro- différentielle** a été étudié dans [ACL 117], où on a également prouvé les théorèmes de l'existence et de l'unicité de solution dans le cas des coefficients variables et fortement oscillants.

G.Panasenko, L.Paoli et I.Kostin ont développé une **étude asymptotique et numérique** de modèle **thermo-visco-élastique de formation d'un matériau composite**.

Ce travail a été commencé dans le cadre d'un projet "Thématiques Prioritaires" de la Région Rhône-Alpes en collaboration avec l'Ecole des Mines (A.Vautrin) et l'entreprise HEXSON Fabrics, producteur des fibres de carbone. Deux thèses (S.Méliani et Z.Abdessamad) sont préparées et soutenues dans le cadre de ce travail. Une collaboration avec l'Université de Bath (UK) V.P.Smyshlyaev est développée. Les travaux [ACL 1], [ACL 2], [ACL 108], [ACL 124] sont publiés à ce sujet.

En cours du contrat précédent, le LAMUSE a recruté deux enseignants chercheurs en **mécanique numérique des fluides** : Emmanuel Leriche, Professeur, et Alexandre Delache, MC. L'objectif de ce recrutement était de **renforcer l'axe de recherche de modélisation des écoulements** dans des

structures minces, établir des liaisons entre la production des nouvelles méthodes de calcul des écoulements et les applications en mécanique des fluides. L'activité de cette nouvelle thématique est développée autour des axes suivants : mécanique des fluides incompressibles newtoniens et non-newtoniens, **simulation et méthodes numériques de type spectrale ou d'éléments spectraux** ; simulation directe de turbulence, en particulier, turbulence stratifiée ; **calcul scientifique à haute performance, instabilités des écoulements non-newtoniens, instabilités géophysiques** ; interaction fluide – structure [ACL 27,28,49,50,103-107].

2. PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE

Application aux phénomènes de lubrification et de vibro-impact
Upres Equipe d'Accueil 3058

Membres :

Mahdi BOUKROUCHE, Professeur, responsable du thème.
Laetitia PAOLI, Professeur

Thésards :

1. Raoul DZONOU (directrice L. Paoli),
(thèse soutenue en mai 2007)
2. Rachid EL-MIR (directeur M. Boukrouche),
(thèse soutenue le 01/12/2005)

Partenaires actifs (travaux conjoints) :

- Grzegorz LUKASZEWICZ, Professeur Université de Varsovie, Pologne.
- Domingo A. TARZIA CONICET, FCE, Université Austral, Rosario, Argentine.
- Guy BAYADA, Professeur INSA-Lyon.
- Lionel CIUPERCA, Maître de Conférences, Université de Lyon 1.
- Alexandre CABOT, Maître de Conférences, Université de Montpellier 2.
- Yves DUMONT, Maître de Conférences, Université de la Réunion.
- Alexander MIELKE, Professeur, Université Humbolt de Berlin et Institut Weierstrass, Allemagne.
- Manuel MONTEIRO MARQUES, Professeur, Université de Lisbonne, Portugal.
- Adrien PETROV, Chercheur, Institut Weierstrass, Allemagne.
- Michelle SCHATZMAN, Directeur de Recherche CNRS, Lyon 1.

Projet Européen SICONOS : « Modelling, simulation and control of nonsmooth dynamical systems »
(Laetitia Paoli)

Formation par la recherche :

- Deux thèses soutenues: Rachid EL-MIR, Raoul DZONOU.
- Un sujet de stage de Master.

Participation à la formation doctorale :

Nous proposons un cours (10h CM) sur les problèmes à frontière libre dans le cadre de l'Ecole Doctorale de Saint Etienne, ainsi qu'un cours (de 20h) en deuxième année et un cours (24h CM et 46h TD) et un cours de (16h CM et 30h TD) en première année du Master de mathématiques.

Organisation de colloques :

Journée EDP en Rhône-Alpes et Auvergne 2006, 16-17 novembre 2006, Saint-Etienne.

Ces journées, qui ont lieu tous les ans en novembre dans l'un des laboratoires de mathématiques de Rhône Alpes - Auvergne, ont été organisées par L.Paoli (membre du comité scientifique des colloques JERAA), à Saint-Étienne en 2006. Nombre de participants 55 dont 18 conférenciers et 14 posters.

Pour plus de détails, voir le site: <http://math.univ-lyon1.fr/jera/>

3. AOPSAN - PROBLEMES SPECTRAUX, ALGEBRE NUMERIQUE ET METHODES INTEGRALES

Mario AHUES, Professeur CE

Alain LARGILLIER, Maître de Conférences H.D.R. Hors Classe

Laurence GRAMMONT, Maître de Conférences

Bilan par domaine de compétences :

- **Approximation spectrale d'opérateurs linéaires, bornés ou fermés, dans des espaces fonctionnels:**
 - Des publications conjointes avec les partenaires de l'Indian Institute of Technology, Bombay (Inde) ont couronné les travaux dans le domaine de l'approximation d'opérateurs intégraux, incluant les équations non linéaires. Ces travaux ont servi d'aval scientifique pour l'élaboration d'un projet soumis à CEFIPRA qui obtint le financement demandé pour la période quadriennale à venir.
 - Un projet ARCUS-India (Région Rhône-Alpes) fut retenu pour financement et développé durant le contrat quadriennal 2007-2011 et permit la réalisation d'une Ecole de Printemps Franco-Indienne dans le domaine de l'approximation d'opérateurs, de niveau Master 2 et Doctorat, avec le concours de l'Indian Institute of Technology Bombay, l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne et l'Université de la Bretagne Occidentale.
 - Les membres Ahues et Largillier intègrent le Steering Committee du congrès international biennal « Integral Methods in Science and Engineering » dont l'édition 2006 fut réalisée à Niagara Falls (Canada) et l'édition 2008 à Santander (Espagne). Les travaux présentés à ces occasions témoignent aussi de la collaboration avec les partenaires de l'Université de Porto (Portugal) dans le sous-domaine concernant le développement de méthodes numériques performantes pour des équations intégrales à noyau faiblement singulier et leurs applications en théorie du transfert, ainsi que les méthodes numériques pour le problème spectral associé.
 - Une thèse en co-tutelle avec l'Université de Porto a commencé en 2008 dans le domaine de l'approximation spectrale matricielle pour des matrices issues de la discrétisation d'opérateurs en dimension infinie. Partenaire français: Pr. Mario AHUES, partenaire portugais: Pr. Paulo VASCONCELOS, doctorante: Mlle Ana-Luisa NUNES.
 - Une collaboration scientifique vit le jour avec l'Université de Batna (Algérie) et donnera lieu à un projet de thèse en co-tutelle pour le quadriennal à venir, dans le sous-domaine des équations intégrales du type Cauchy.
 - Une collaboration scientifique se développa avec l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne dans le cadre du PPF Alliana conduisant à un co-encadrement de thèse. Partenaire UJM: Alain LARGILLIER, partenaire ENSMSE: Laurent CARRARO, doctorant: Bertrand GAUTHIER. Le sous-domaine de recherche est celui du Krigeage.
- **Problèmes de valeurs propres en algèbre linéaire:**
 - Dans le cadre du développement de méthodes de raffinement issues d'une formulation non linéaire permettant l'application de méthodes du type Newton, une thèse de doctorat fut soutenue en avril 2009.
 - Un Minisymposium consacré à l'Etat de l'Art dans les méthodes pour des problèmes spectraux matriciels fut accepté au sein du congrès international « SIAM Meeting on Applied Linear Algebra » programmé pour octobre 2009 à Monterey, Californie, USA. Les co-organisateur de cet événement sont M. AHUES et A. LARGILLIER.
- **Contributions au thème transversal TRAS:** La notion de singularité faible d'un noyau d'opérateur intégral a été définie de manière rigoureuse, avec des contraintes moindres par rapport à ce que la littérature spécialisée exige dans les cas d'application concernés par nos travaux. Avec les nouvelles hypothèses, des bornes d'erreur relative ont été établies pour des approximations par projection et par quadrature du type intégration produit. Complétés avec une

nouvelle procédure de raffinement itératif, ces résultats ont permis de construire et valider des méthodes d'approximation utiles à des applications en Astrophysique. De nouvelles méthodes de l'accélération de convergence des méthodes itératives ont été proposées et justifiées dans [ACL 12].

- **Participation à la formation doctorale:** Deux séances de 4h sont consacrées à la discrétisation d'opérateurs et la résolution numérique des grands systèmes linéaires associés.

4. ALGÈBRE

Roland BERGER, PR, section 25.

Florence FAUQUANT-MILLET, MC, section 25.

Laurent RIGAL, MC, HDR, section 25, PR à Paris 12 depuis septembre 2008.

Rachel TAILLEFER, MC, section 25.

Benoît KRIEGK, Doctorant (directeur de thèse : Roland Berger), puis ATER. Depuis janvier 2009, post-doctorant à Hasselt (Belgique).

Les algébristes stéphanois font partie du GDR 2432 « Algèbre non commutative et théorie des invariants en théorie des représentations ». Ils font partie également du Groupe de Travail Interuniversitaire en Algèbre (GTIA) qui se réunit régulièrement à Paris (Institut Henri Poincaré) ou en province.

Axes généraux de recherche du thème ALGÈBRE : algèbre homologique, algèbres enveloppantes des algèbres de Lie, géométrie algébrique non commutative et déformations des algèbres associatives, groupes quantiques, représentations des algèbres associatives.

Commentaires : Ces axes généraux de recherche relèvent de l'algèbre non commutative. Ils contiennent les axes spécifiques à chacun des membres du thème « Algèbre ».

Axe 1 : Algèbres de Koszul généralisées (R. BERGER, B. KRIEGK, R. TAILLEFER)

1- Dans ACL15, R. Berger et N. Marconnet ont démontré la dualité de Poincaré (entre homologie et cohomologie de Hochschild) pour la classe des algèbres N-homogènes qui sont Koszul au sens généralisé par R. Berger et qui sont Gorenstein au sens de Artin et Schelter, et l'ont illustrée par des exemples variés. La preuve est basée sur un théorème général de dualité dû à M. Van den Bergh. On utilise aussi les N-complexes, en particulier le N-complexe $L(A)$ introduit par R. Berger, M. Dubois-Violette et M. Wambst en 2003. Dans ce même travail, un résultat quadratique de P. Smith concernant la propriété de Frobenius de l'algèbre de Yoneda est étendu au cas N quelconque.

2- Dans ACL17, R. Berger et V. Ginzburg ont introduit et développé une version naturelle inhomogène de la propriété N-Koszul de R. Berger, indépendamment du travail de Floystad et Vatne paru aussi au J. Algebra en 2006, reposant sur la même idée de généralisation au cas N du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW), mais dans un cadre plus large car il permet d'inclure les algèbres de réflexions symplectiques dites *supérieures* introduites aussi dans notre article. Il y a là des perspectives de recherche intéressantes, consistant à essayer d'appliquer aux « supérieures » le programme d'étude mis en oeuvre par P. Etingof et V. Ginzburg dans « Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism » (Invent. math. 2002). L'article ACL17 est annoncé dans ACL14 dont l'objet principal est un résultat nouveau de nature fondamentale de la théorie des algèbres graduées, ce qui donne en même temps une preuve directe d'un résultat bien connu de cette théorie.

3- R. Berger et M. Dubois-Violette ont déterminé explicitement dans ACL16 toutes les PBW déformations des algèbres de Yang-Mills. A. Connes et M. Dubois-Violette avaient montré que les algèbres de Yang-Mills sont 3-Koszul homogènes.

4- Depuis leur introduction par M. Kontsevich (s'inspirant des variétés de Calabi-Yau de la géométrie algébrique complexe), l'étude des catégories de Calabi-Yau a connu récemment un essor important en théorie des représentations (en particulier dans le cadre des catégories amassées) et a inspiré une version non commutative des algèbres de Calabi-Yau dont la définition précise est due à V. Ginzburg. Cette version non commutative est également présente en Physique (en théorie des cordes) et fait

intervenir en dimension 3 un *potentiel* qui détermine les relations de définition de l'algèbre. Une conjecture de M. Van den Bergh indique que toute algèbre 3-Calabi-Yau serait le quotient de l'algèbre des chemins d'un carquois par un idéal entièrement déterminé par un tel potentiel. Cette conjecture a été démontrée dans le cas homogène (autrement dit gradué) par R. Bocklandt. R. Berger et R. Taillefer se sont intéressés dans ACL19 au cas inhomogène tel qu'introduit par R. Berger et V. Ginzburg (PBW déformations d'algèbres N-Koszul). Ils ont démontré que le fait de déformer convenablement le potentiel d'une algèbre de carquois graduée préservait la propriété d'être 3-Calabi-Yau. Ils ont également donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une PBW déformation d'une algèbre 3-Calabi-Yau graduée puisse être définie par un potentiel (inhomogène). Plusieurs classes d'exemples illustrent leur propos.

5- Dans ACL21, sont étudiées systématiquement les algèbres à *une* relation homogène de degré N, ainsi que leurs PBW déformations. L'outil principal est un théorème dû à V. Gerasimov. Un critère de N-Koszulité est donné, fournissant de nouveaux exemples. Le cas N=2 se présente comme un cas d'école (« a toy model ») pour lequel tout s'exprime par des matrices, et qui rejoint des travaux antérieurs de M. Dubois-Violette. Le passage de la propriété de Calabi-Yau des algèbres graduées à leurs PBW déformations est examiné à nouveau à cette occasion.

6- Depuis l'article de R. Berger de 2001, les algèbres N-Koszul ont été d'une part exploitées dans la situation plus large des algèbres de carquois avec relations, et d'autre part généralisées à d'autres fonctions du degré d'engendrement des projectifs de la résolution minimale. La littérature en question est déjà importante à ce jour et le lecteur est invité à se reporter aux articles ACL18, 20, 21) et aux références qu'ils contiennent. La dualité de Koszul a été étendue au cas N par J.-W. He et D.-M. Lu en termes d'algèbres A-infinies et cette dualité fournit par ailleurs d'autres généralisations naturelles des algèbres N-Koszul (Cassidy et Shelton).

7- Dans ACL98 (provenant de sa thèse), B. Kriegk a énoncé et démontré un critère numérique pour la propriété de N-Koszulité, étendant le cas connu N=2. Il a défini aussi dans sa thèse une large classe d'exemples d'algèbres N-Koszul, en associant une (super) algèbre N-Koszul à tout opérateur de Hecke et tout entier N au moins égal à 2. Ce travail est inclus dans l'article ACL133 écrit en collaboration avec P. H. Hai et M. Lorenz. Ce dernier article contient également (et c'est même son objet principal) une vaste généralisation d'un célèbre théorème de combinatoire appelé le théorème « maître » de MacMahon. En fait, Hai, Kriegk et Lorenz trouve un cadre conceptuel large et naturel à ce théorème en associant à chaque (super)algèbre N-Koszul A une formule combinatoire « à la MacMahon » qui se réduit à la formule classique de MacMahon quand A est une algèbre de polynômes. Parmi les applications, il retrouve une formule due à Etingof et Pak, en en fournissant même une version « super ».

Axe 2 : Invariants associés aux algèbres enveloppantes classiques et quantifiées

(Florence FAUQUANT-MILLET)

F. Fauquant-Millet a poursuivi ses travaux avec A. Joseph sur le semi-centre de l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie, faisant suite à l'article ACL61 où elle démontrait que ce semi-centre est une algèbre de polynômes lorsque l'algèbre de Lie semi-simple est un produit d'algèbres de Lie simples de type A ou C ainsi que dans d'autres cas particuliers d'algèbres de Lie semi-simples et de paraboliques.

Ainsi, dans l'article ACL60, F. Fauquant-Millet, en collaboration avec A. Joseph, étudie encore plus précisément le semi-centre de l'algèbre enveloppante d'un parabolique. Tout d'abord, en utilisant les semi-invariants du cas quantique obtenus dans son article « Sur les semi-invariants d'une sous-algèbre parabolique d'une algèbre enveloppante quantifiée » de 2001, paru au Transformation Groups, elle construit, grâce à l'application dite de Kostant déjà introduite dans son article de 2005, des semi-invariants particuliers ainsi que des éléments harmoniques. Elle applique ensuite ses résultats au cas particulier du Borel pour établir un lien entre les semi-centres de paraboliques dans les deux cas extrêmes du Borel et de l'algèbre semi-simple tout entière.

D'autre part, elle calcule l'indice du parabolique en fonction du cardinal de certains ensembles particuliers d'orbites du système de racines simples de l'algèbre de Lie semi-simple, résolvant ainsi une conjecture de Tauvel et Yu sur cet indice. Elle construit également un parabolique tronqué dont le centre de l'algèbre enveloppante correspond au semi-centre de l'algèbre enveloppante du parabolique tout entier et dont l'indice est égal à la dimension de Gelfand-Kirillov du semi-centre de l'algèbre enveloppante du parabolique tout entier. Enfin, définissant des « faux degrés », grâce à la structure combinatoire sous-jacente du semi-centre obtenue dans son article de 2005, (faux degrés qui correspondent aux vrais degrés lorsque le semi-centre est une algèbre de polynômes) elle prouve que

la somme de ces faux degrés est égale à la demi-somme de la dimension et de l'indice du parabolique.

Axe 3 : Etude géométrique des algèbres quantiques (Laurent RIGAL)

Les algèbres quantiques auxquelles on fait référence ici sont des déformations non-commutatives à un paramètre des anneaux de coordonnées de certaines variétés algébriques affines ou projectives telles que les variétés de drapeaux, leurs variétés de Schubert et certaines variétés affines qui leur sont associées (variétés déterminantielles,...). Ces déformations apparaissent naturellement dans la théorie des groupes quantiques comme des algèbres d'invariants en un sens non commutatif où l'on remplace l'action d'un groupe (usuel) par celle d'un groupe quantique (c'est-à-dire une algèbre de Hopf d'un certain type).

Par étude géométrique des algèbres quantiques, on entend essentiellement deux types d'approches.

La première approche considère ces déformations comme des variétés (quotient) non-commutatives et s'attache à l'étude de ces algèbres du point de vue des propriétés de régularité. Elle relève de la géométrie algébrique non-commutative. L'étude des anneaux d'invariants du point de vue des propriétés de régularité (propriété de Gorenstein, de Cohen-Macaulay, *etc*) est un thème central de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique. Par exemple, on sait que l'anneau des invariants d'une algèbre de polynômes sur C sous l'action linéaire d'un groupe linéairement réductif est Cohen-Macaulay, suivant un résultat célèbre et très important de Hochster et Roberts datant de 1974.

Dans le contexte de la géométrie algébrique non-commutative, de récents travaux ont permis de définir des bonnes propriétés de régularité (exprimées en termes exclusivement homologiques) qui étendent les notions classiques ci-dessus au cadre non-commutatif (propriétés de Cohen-Macaulay, Gorenstein,...). Une part importante des travaux récents de L. Rigal vise à montrer que le théorème de Hochster-Roberts s'étend au cadre non-commutatif. Dans ACL100 et ACL99, on montre que les anneaux déterminantielles quantiques, les Grassmanniennes quantiques et leurs variétés de Schubert quantiques (qui sont des exemples fondamentaux de tels anneaux d'invariants quantiques pour les groupes quantiques de type A) sont de Cohen-Macaulay au sens de la géométrie algébrique non commutative. Ce résultat a été obtenu en introduisant la notion d'*algèbre graduée quantique avec loi de redressement*, dont on verra plus loin qu'elle a d'autres applications.

La seconde approche est de nature plus combinatoire. Elle vise à étudier les spectres premiers des algèbres quantiques en question et s'inscrit donc dans une lignée de travaux dont le but final est l'étude des idéaux primitifs des algèbres issues de la théorie de Lie. Dans le cadre quantique, de nombreux travaux récents ont montré qu'on dispose de l'action naturelle d'un tore sur les algèbres pertinentes et que cette action permet de *stratifier* leur spectre. Dans ACL101, on montre que la très célèbre décomposition de la Grassmannienne en cellules de Schubert peut être étendue à la Grassmannienne quantique (on utilise pour cela sa structure d'algèbre graduée quantique avec loi de redressement). Une étude fine des cellules de Schubert quantique qui apparaissent ainsi (en fait initiée dans ACL99) permet ensuite de paramétrer les idéaux premiers invariants sous l'action du tore mentionné plus haut par certains diagrammes admissibles de nature combinatoire. Ce faisant, des liens étroits avec la théorie de la positivité totale et avec la géométrie de Poisson des variétés concernées sont mis en évidence puisque ces mêmes objets combinatoires apparaissent dans des travaux récents d'autres auteurs concernant ces deux champs de recherche. L'article ACL101 repose en partie sur une étude faite dans ACL102 où la problématique centrale était l'étude des mêmes algèbres du point de vue des propriétés de factorialité non-commutative.

Axe 4 : Cohomologies et représentations des algèbres de Hopf et des algèbres de dimension finie (Rachel TAILLEFER)

Les variétés de modules pour les groupes permettent d'utiliser l'algèbre commutative dans l'étude des représentations de groupes. Cette théorie s'est avérée être un outil très puissant dans l'étude des représentations modulaires des groupes finis (travaux de Benson et Carlson entre autres). N. Snashall et O. Solberg ont adapté cette théorie des variétés de modules afin d'étudier les représentations des algèbres associatives de dimension finie. Leur étude les a menés à énoncer la conjecture suivante: le quotient de la cohomologie de Hochschild d'une algèbre de dimension finie par l'idéal engendré par les éléments nilpotents est une algèbre de type fini. D'autres conditions de finitude sur la cohomologie de Hochschild d'une algèbre de dimension finie ainsi que sur son algèbre de Yoneda sont naturellement apparues dans l'étude qui a été faite ensuite des variétés de modules pour une algèbre de dimension finie et auto-injective dans l'article de Erdmann-Holloway-Snashall-Solberg-Taillefer paru au journal *K-Theory* en 2004.

Il a été établi en 2008, par un contre-exemple exhibé par F. Xu, que la conjecture ci-dessus est fautive. Cependant, elle est vraie dans de nombreux cas (algèbres monomiales, algèbres auto-injectives de type de représentation fini, algèbres de Hopf cocommutatives de dimension finie en particulier). R. Taillefer travaille actuellement avec N. Snashall à vérifier cette conjecture pour une grande classe d'algèbres auto-injectives qui ne sont pas de type de représentation fini: les algèbres bisérielles spéciales auto-injectives. Ces travaux ont donné lieu à deux prépublications dont une acceptée à *Journal of Algebra and its Applications* sous réserve de légères modifications.

D'autre part, dans ACL56, R. Taillefer a étudié, avec K. Erdmann, E.L. Green et N. Snashall, les représentations des doubles de Drinfeld d'une famille d'algèbres de Hopf proches de certains groupes quantiques. L'objectif de cette étude est de mieux comprendre les doubles de Drinfeld des algèbres de Hopf comme algèbres associatives. Dans l'article ACL56, ils ont donné une présentation par carquois et relations des doubles de Drinfeld, ce qui leur a permis de décrire toutes les représentations de ces algèbres. Ils ont ensuite étudié les produits tensoriels de représentations, donnant une formule explicite de type Clebsch-Gordan pour le produit tensoriel de nombreuses représentations.

Dans ACL139, R. Taillefer a utilisé ces résultats ainsi que des résultats de sa thèse pour calculer la cohomologie de M. Gerstenhaber et S.D. Schack de certaines algèbres de Hopf. Cette cohomologie est en lien avec la théorie des déformations des algèbres de Hopf. Elle a également été utilisée dans des résultats de structure ou de classification de certaines algèbres de Hopf. Cependant, peu d'exemples explicites de calcul de cette cohomologie existent (algèbres de groupes, algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie, algèbres de fonctions sur des groupes algébriques affines). R. Taillefer a calculé dans ACL139 cette cohomologie pour les algèbres de Hopf mentionnées au paragraphe précédent, qui sont des algèbres de Hopf qui ne sont ni commutatives, ni cocommutatives.

Enfin, dans un travail commun avec M. Lanzilotta et M.J. Redondo, R. Taillefer a établi une classification combinatoire des classes d'équivalence dérivée des algèbres dites « héréditaires par morceaux ». Cette classification est donnée en termes du polynôme caractéristique de la matrice de Coxeter d'une algèbre de dimension finie et de dimension globale finie. Le premier coefficient non trivial, la trace, avait déjà été utilisé par D. Happel pour séparer certaines classes d'équivalence dérivée d'algèbres héréditaires par morceaux. M. Lanzilotta, M.J. Redondo et R. Taillefer ont terminé cette classification combinatoire en utilisant le polynôme caractéristique de la matrice de Coxeter.

Activités internationales du thème « ALGÈBRE » :

Communications orales dans des congrès internationaux : voir les listes ACTI et COM ci-après.

Partenaires étrangers :

- K. Erdmann, Université d'Oxford, Royaume-Uni (R. Taillefer)
- V. Ginzburg, Université de Chicago, Etats-Unis (R. Berger)
- E.L. Green, Virginia Tech., Etats-Unis (R. Taillefer)
- P. H. Hai, Universités de Duisburg-Essen, Allemagne, et de Hanoi, Vietnam (B. Kriegk)
- A. Joseph, Institut Weizmann, Rehovot, Israël (F. Fauquant-Millet)
- M. Lanzilotta, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay (R. Taillefer)
- S. Launois, Université de Canterbury, Royaume-Uni (L. Rigal)
- T.H. Lenagan, Université d'Edimbourg, Royaume-Uni (L. Rigal)
- M. Lorenz, Temple University, Philadelphie, Etats-Unis (B. Kriegk)
- M.J. Redondo, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentine (R. Taillefer)
- N. Snashall, Université de Leicester, Royaume-Uni (R. Taillefer)
- M. Van den Bergh, Université d'Hasselt, Belgique, (B. Kriegk)

Séjours d'étrangers à Saint-Etienne (Professeurs invités) : K. Goodearl (Santa Barbara, Etats-Unis) en avril 2006, A. Solotar (Buenos Aires, Argentine) en juin 2006 et mai 2008, M. Lorenz (Philadelphie, Etats-Unis) en novembre 2008, N. Snashall (Université de Leicester, Royaume Uni) en juin 2007 et mai 2009.

Appartenances à des réseaux internationaux :

- Par l'intermédiaire du GDR 2432 (qui en est le noeud en France), les algébristes stéphanois ont fait partie du réseau européen LIEGRITS : « Flags, Quivers and Invariant Theory in Lie Representation

Theory », Marie Curie Research Training Network funded by the European Community (F. Van Oystaeyen, Anvers), jusqu'à sa clôture en février 2008.

- Par l'intermédiaire du GDR 2432, les algébristes stéphanois font partie du GDRE (GDR européen) « French-British Network in Representation Theory » depuis sa création début 2008.

- L. Rigal a été membre, de 2002 à 2007, du Groupe de recherche « Noncommutative Geometry (Quantum Algebras and Coinvariant Theory) », org. T.H. Lenagan (Université d'Edimbourg) et K.A. Brown (Université de Glasgow), financé par le *Leverhulme Trust*.

- Les algébristes stéphanois font partie du Programme International de Coopération Scientifique du CNRS intitulé PICS 3410 « Homologie et déformation en algèbre » (Argentine, Brésil, Uruguay, France).

- Pendant les deux années civiles 2007 et 2008, L. Rigal a été le responsable français d'un Partenariat Hubert-Curien (PHC) ALLIANCE entre la France et le Royaume-Uni, dont le responsable britannique était T. Lenagan (Edimbourg). Les algébristes stéphanois faisaient partie de ce partenariat.

Séjours à l'étranger :

- Séjours de L. Rigal Depuis 2006, à l'Université d'Edimbourg, de Canterbury, de Buenos-Aires.

- Séjour de F. Fauquant-Millet à l'Institut Weizmann (Israël) du 20 au 30 janvier 2008, au "Winter Master Class on Enveloping Algebras and Related Topics".

- Séjour de R. Berger de 1 mois en Argentine (Mar del Plata, Buenos-Aires, Cordoba) en 2006.

- Séjour post-doctoral de B. Kriegk à l'université d'Hasselt, en Belgique, auprès du professeur M. Van den Bergh, depuis janvier 2009.

Autres activités liées à la recherche :

Cours de Master 2 ou doctoral :

- R. Berger et L. Rigal ont assuré un cours de Master 2 dans le cadre d'une cohabilitation de l'Université de Saint-Etienne avec ENSL, Lyon 1, Chambéry, Ecole Centrale et INSA de Lyon, en 2005-2006.

- Cours de niveau doctoral enseigné par L. Rigal à l'université de Buenos-Aires sur l'invitation du professeur A. Solotar.

Encadrement de doctorant : R. Berger a dirigé la thèse de B. Kriegk à partir de septembre 2004 jusqu'à la soutenance en décembre 2007 sur « Divers aspects des algèbres de Koszul généralisées », devant le jury composé de J. Alev (Reims), R. Berger (Saint-Etienne), M. Dubois-Violette (CNRS-Paris 11, rapporteur), C. Kassel (CNRS-Strasbourg, rapporteur), M. Van den Bergh (Hasselt, Belgique). B. Kriegk est actuellement post-doctorant à l'Université de Hasselt.

Organisations de workshops en France : R. Berger et L. Rigal ont organisé en 2005 et 2007 des Journées d'Algèbre dans le cadre du GTIA. R. Berger a co-organisé avec B. Leclerc (Caen) un colloque d'une semaine au CIRM intitulé « Calabi-Yau algebras and N-Koszul algebras » en octobre 2007 (52 participants dont 26 étrangers).

Appartenances à des jurys de thèse :

- L. Rigal a été membre du jury de thèse d'Alexis Dite (direction T.H. Lenagan, Université d'Edimbourg, septembre 2006).

- R. Berger a été membre du jury de thèse de K. De Naeghel (direction M. Van den Bergh, Université d'Anvers, février 2006). Il a également été membre du jury d'habilitation de L. Rigal (décembre 2003).

Appartenances à des commissions de spécialistes :

- R. Berger (vice-président puis président), F. Fauquant-Millet, L. Rigal, R. Taillefer ont été membres de la commission de spécialistes de 25-ième section de l'Université de Saint-Etienne. Ils ont été également membres du comité de sélection pour le poste 25MC492 en 2009 (L. Rigal comme extérieur).

- R. Berger et L. Rigal ont été membres extérieurs de la commission de spécialistes de 25-ième section de l'Université Clermont-Ferrand 2, et également L. Rigal à l'Université de Reims.

Arbitrages :

- R. Berger : Communications in Algebra, Duke Mathematical Journal, Journal de Crelle, Journal of Algebra, Mathematische Zeitschrift.
- L. Rigal : Communications in Algebra, Asian Journal of Mathematics, Journal of Algebra and its Applications, Journal of Algebra.
- R. Taillefer : Comm. Alg. (2006), Adv. Math. (2007), J. Pure Appl. Alg. (2008), Bull. London Math. Soc. (2008), Trans. Amer. Math. Soc. (2009).

Responsabilités collectives : R. Taillefer est responsable du Master 1 de Mathématiques depuis juillet 2007. F. Fauquant-Millet est responsable du Semestre 6 de la Licence de Mathématiques depuis 2009. R. Berger a été responsable pédagogique de la Licence de Mathématiques de 2003 à 2006 et est responsable du CAPES de Mathématiques depuis 2008. L. Rigal a été responsable des finances du Département de Mathématiques jusqu'à son départ en septembre 2008.

Exposés :

- Les travaux de F. Fauquant-Millet issus de ACL61 ont donné lieu à des exposés à l'Institut Weizmann (Rehovot, Israël) en janvier 2008 et à l'Université du Kent à Canterbury (Angleterre) en septembre 2008.
- Les travaux de L. Rigal ont donné lieu à de nombreux exposés de séminaires ou conférences, en France et à l'étranger, en particulier : Clermont-Ferrand, Caen, Dijon, Lens, Lyon, Paris 6, Paris 7, Paris 12, Paris 13, Poitiers, Luminy, Edimbourg, Glasgow, Louvain-la-Neuve, Murcia, Seattle, Buenos-Aires.
- Les travaux de R. Taillefer ont donné lieu à des exposés dans des séminaires et des conférences en France et à l'étranger : Lyon 1, Montpellier 2, Lens, Reims, Leicester.

Divers : L. Rigal a soutenu son Habilitation à diriger des recherches à Saint-Etienne, le 12 décembre 2003. Il a été nommé professeur à l'université Paris 12 (IUFM) en septembre 2008 et est membre du LAGA (université Paris 13) depuis cette même date.

6. THEORIE DES NOMBRES

Membres (au 1er janvier 2009)

Driss ESSOUABRI, professeur, arrivé en 2008
Alain FAISANT, chercheur bénévole
François FOUCAULT, maître de conférences
Georges GREKOS, maître de conférences
François HENNECART, professeur
Federico PELLARIN, professeur, arrivé en 2007
Olivier ROBERT, maître de conférences, arrivé en 2005

Commentaires : sur la période 2005-2009, le lamuse a recruté trois nouveaux théoriciens des nombres. N. Brisebarre a quitté le lamuse en 2007 suite à l'obtention d'un poste de CR1-CNRS au LIP de l'ENS Lyon. A. Faisant, G. Diaz et F. Gramain ont fait valoir leur droit à la retraite. Les activités scientifiques de N. Brisebarre ont concerné principalement l'arithmétique des ordinateurs.

Colloques ou rencontres organisés sous l'égide du Lamuse : chaque année, une rencontre en théorie des nombres a été organisée, excepté en 2009 en raison de l'organisation des 26èmes Journées Arithmétiques :

- Colloque de Théorie additive des nombres à Saint-Etienne (janvier 2005), organisateurs : G. Grekos, F. Hennecart.
- Journée de combinatoire et arithmétique, (mai 2005), organisateurs : A. Faisant, G. Grekos.
- Colloque de Théorie additive des nombres à Monastir (janvier 2006), organisateurs : F. Bensaid, F. Hennecart.
- Rencontres arithmétiques et combinatoires de Saint-Etienne (juin 2006), organisateur : G. Grekos.

- Rencontres stéphanoises en Théorie Analytique des Nombres (juin 2007), organisateur : O. Robert.
- Workshop "Sequences" Malenovice, République Tchèque, septembre 2007, organisateurs : R. Giuliano, G. Grekos, L. Misik.
- Rencontres stéphanoises de théorie des nombres (juin 2008), organisateur : F. Pellarin.
- Journée de Théorie des Nombres (septembre 2008), organisateur : G. Grekos
- Colloque tournant de théorie analytique des nombres et approximation diophantienne, un colloque qui se réunit deux fois par an alternativement à Grenoble, Lyon et Saint-Etienne, et tous les deux ans à Clermont-Ferrand. Responsables : B. Adamczewski (Lyon), F. Pellarin, T. Rivoal (Grenoble). Une session a eu lieu à Saint-Etienne le 18 mars 2009.
- 26èmes Journées Arithmétiques de Saint-Etienne (6-10 juillet 2009) <http://ja2009.univ-st-etienne.fr> [organisateurs : D. Essouabri, F. Foucault, F. Hennecart, F. Pellarin, O. Robert et l'aide de A. Faisant et F. Gramain]. Congrès rassemblant près de 200 participants, un des plus grands congrès mondiaux en Théorie des Nombres, subventionné par le Ministère (3000), la région Rhône-Alpes (3000), la Mairie de Saint-Etienne (réception, cadeaux et subvention en attente), le CNRS - GDR Théorie des nombres (9000), le Conseil Général de la Loire et Saint-Etienne-Métropole (4000) et le laboratoire (4000).

Séminaire organisé : séminaire de théorie des nombres de Saint-Etienne (environ 15 exposés par an). Responsable : F. Pellarin.

Collaborations et coopérations internationales :

- Avec la Hongrie : Institut Rényi et Université Eötvös (Budapest). F. Hennecart a noué des relations de travail avec I. Ruzsa (membre de l'Académie de Sciences de Hongrie), N. Hegyvari (professeur à l'université de Budapest), K. Gyarmati (chercheur à l'Institut Rényi).
- Avec la Tunisie : F. Hennecart a piloté un projet de recherche MIRA (Rhône-Alpes) entre janvier 2005 et décembre 2007.
- 2006-2008 : Driss Essouabri a participé au projet conjoint entre le CNRS et la société Japonaise pour la promotion de la science (JSPS), intitulé : « Fonctions zêta en plusieurs variables et applications ». La collaboration avec les collègues Japonais continue au delà de ce projet. En particulier la JSPS financera le séjour de trois collègues japonais K. Matsumoto et Y. Komori de l'université de Nagoya et H. Tsumura de l'université de Tokyo dans notre Laboratoire une dizaine de jours en Octobre 2009. Il prévoit aussi l'organisation à Saint-Etienne d'un atelier franco-japonais sur les fonctions zêta et applications.
- A partir d'octobre 2009 : Mr Sadaoui Boualam enseignant du centre universitaire Khemis Meliana (Algérie) séjournera dans notre Laboratoire pour une période de 18 mois (financée par une bourse de coopération obtenue dans le cadre du programme franco-algérien de formation supérieure en France (PROFAS)). Ce séjour lui permettra de finir sa thèse co-encadrée par Driss Essouabri et Mr. Derbal Abdallah (MC à l'École Normale Supérieure d'Alger) .
- G. Grekos était responsable pour la France d'un programme « EcoNet » (Ministère des affaires étrangères) avec la Slovaquie et la République Tchèque (2006 et 2007; budget français 15000 euros par année) et d'un programme « ARCUS-Inde » (Ministère des affaires étrangères et Région Rhône-Alpes; 2006-2008; budget total français 9000 euros).
- Professeurs invités à Saint-Etienne : V. Balasz (Bratislava), R. Giuliano (Pise), N. Hegyvari (Budapest), C. Helou (Pennsylvanie), L. Misik (Ostrava).

Encadrement :

- F. Hennecart a encadré trois mémoires de TER en master 1 maths entre 2006 et 2009.
- F. Hennecart a encadré 4 mémoires de master 2 recherche en 2005 et 2006.
- F. Hennecart et O. Robert ont encadré pendant 1 an (2007-2008) la thèse de K. Kaszewski, qui a finalement renoncé à poursuivre la préparation de sa thèse.
- D. Essouabri encadre les thèses de L. Delabarre et de M. Roux respectivement sur les domaines maximaux de méromorphie de produits eulériens multivariés et sur les séries de Dirichlet et l'analyse en moyenne des algorithmes de réduction de réseaux.
- Christophe Rose, sous la direction d'Adamczewski (Lyon 1) et F. Pellarin, travaille sur l'optimisation du dictionnaire entre séries algébriques et automates finis.

Expertise :

- F. Hennecart a été rapporteur des thèses de G. Bordes (Bordeaux, 2005), S. Col (Nancy, 2006), B. Girard (Palaiseau, 2008) et de l'HDR de D. Gryniewicz (Graz, 2008).
- F. Hennecart a arbitré des articles pour Journal of Number Theory, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, Colloquium Mathematicum, Ramanujan Journal. Il a également durant la période 2005-2009 rédigé une dizaine de rapports pour la base de données de l'AMS.
- G. Grekos a arbitré plusieurs articles (Journal of Number Theory, Acta Arithmetica, Graphs and Combinatorics, Journal of Combinatorial Theory A, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux). Rapports pour National Science Foundation (USA), pour les centres de recherche scientifique tchèque et slovaque et pour des demandes de promotion (Autriche, USA).
- G. Grekos est membre des comités éditoriaux de Mathematica Slovaca et de Uniform Distribution Theory
- F. Pellarin expertise des manuscrits pour des revues mathématiques internationales et des projets en vue de financement par des fonds NSA-AMS aux Etats-Unis.
- D. Essouabri expertise des manuscrits pour des revues mathématiques internationales.
- O. Robert a été désigné par plusieurs revues internationales pour des rapports d'arbitrage.

Cours niveau master 2 ou doctoraux :

- F. Hennecart a assuré deux cours de master 2 à l'université Lyon 1 entre janvier 2005 et juin 2006.
- F. Pellarin a assuré un cours de master 2 durant l'année 2008-2009.
- O. Robert a assuré un cours de master 2 durant l'année 2007-2008.

Invitations :

- F. Pellarin est régulièrement invité à des conférences internationales.
- F. Hennecart est régulièrement invité à l'université de Budapest et à l'institut Rényi de Budapest pour des exposés lors de séjours de recherche.
- D. Essouabri a été invité à plusieurs conférences internationales suivantes (voir Annexe A).

Bilan scientifique du thème « Théorie des nombres » de la période 2005-2009 par thématique :

Théorie analytique et additive des nombres et combinatoire

Membres : D. Essouabri, F. Foucault, G. Grekos, F. Hennecart, O. Robert

Thématique 1 : Théorie additive et combinatoire des nombres (F. Hennecart)

Les thèmes de recherche abordés sont divers et ne rentrent pas dans un cadre unique. Ils concernent

- le problème de Waring, les sommes de cubes, les sommes de bicarrés, la densité probabiliste.
- les bases additives, l'addition restreinte, l'ordre restreint, les sommes et différences d'un ensemble fini.
- le problème de somme-zéro, le théorème d'Erdős-Ginzburg-Ziv, la fonction de Brakemeier, la constante de Davenport.

Les principaux outils utilisés sont le théorème de Cauchy-Davenport d'addition dans un corps, le théorème de Dias da Silva-Hamidoune d'addition restreinte dans un corps, le théorème de Kneser dans les groupes abéliens, le théorème de Kneser pour la somme de suites ayant chacune une densité asymptotique inférieure non nulle, les inégalités de Plünnecke-Ruzsa pour l'addition d'ensembles finis, le théorème de Roth pour les ensembles sans triple en progression arithmétique, le théorème de Freiman pour les ensembles à petit double, le théorème d'incidence de Bourgain-Katz-Tao. Les points forts de l'activité scientifique dans cette thématique sont l'étude de la densité des sommes de 3 cubes, l'étude de la fonction de Brakemeier, le problème de la coloration d'une base additive, l'addition restreinte pour les bases d'ordre 2, la comparaison des cardinaux de l'ensemble

somme et de l'ensemble différence, la construction explicite d'expansions et d'extracteurs ainsi que l'étude de la stabilité de suites de parties de \mathbf{N} générée à partir de transformations linéaires.

Une description précise des travaux réalisés sur ce thème se trouve dans l'appendice A.

Thématique 2 : théorie multiplicative des nombres (O. Robert)

Pendant la période 2005-2009, les travaux de O. Robert ont plus particulièrement porté sur les thèmes suivants :

- Théorie multiplicative des nombres, notamment sur le problème de la répartition du noyau d'un entier, en collaboration avec G. Tenenbaum. Les techniques utilisées relèvent essentiellement de la méthode du col. Deux articles sont actuellement en cours d'élaboration sur ce sujet.
- Nombre de solutions d'un système diophantien et problèmes de paucité : le problème de paucité, revient à déterminer si les solutions non triviales d'un système diophantien sont minoritaires par rapport aux solutions triviale. De manière quantitative, on donne une estimation de la densité de du nombre de telles solutions. Un article sur un cas particulier est actuellement en phase avancée de rédaction.
- Sommes d'exponentielles et applications : à part un article sur les sommes simples d'exponentielles, l'essentiel de mes travaux a porté sur les sommes multiples d'exponentielles multiples à phase monomiale, en particulier le cas des sommes triples. A titre d'application, en collaboration avec P. Sargos, nous avons amélioré le terme d'erreur dans le problème des groupes abéliens : le résultat obtenu est proche d'une conjecture due à Richert. Le résultat a donné lieu article. En collaboration avec E. Kowalski et J. Wu, nous avons développé deux autres applications : la première concerne la répartition des nombres B-libres (généralisation des entiers sans facteur carré) dans les petits intervalle, et les autres permettent d'établir le caractère de certaines non lacunaire dans des petites intervalles pour le développement en série de Fourier de certaines fonctions automorphes. Ces résultats ont donné lieu à un article.
- Intégrales oscillantes à phase polynomiale : en collaboration avec P. Sargos, nous avons établi des majorations d'intégrales oscillantes à phase polynomiale à n indéterminées. Les majorations sont uniformes par rapport à une famille générale de domaines d'intégration, et nous améliorons essentiellement un résultat dû à Stein dans le cas où l'on évite une famille particulière de polynômes.

Thématique 3 : séries de Dirichlet, fonctions zêta et applications (D. Essouabri, doctorants : L. Delabarre et M. Roux)

Les travaux de recherche de ce groupe concernent les séries de Dirichlet et les fonctions zêta à une ou plusieurs variables. Ce sujet se situe au carrefour de la théorie des nombres, de la géométrie arithmétique, de l'analyse et la géométrie complexe, de la physique mathématique,.. Plus précisément, il s'agit d'étudier les propriétés d'une classe d'objets analytiques appelés séries de Dirichlet ou fonctions zêta. Ces fonctions zêta interprètent des problèmes d'origine arithmétique (exemple répartition des nombres premiers, des entiers vérifiant des contraintes arithmétiques,..) ou de géométrie arithmétique (exemple : le comptage des solutions d'équations diophantiennes, des points rationnels sur les variétés algébriques,..) ou des problèmes venant de la physique mathématique (Exemple : Spectre du Laplacien,..), en d'autres problèmes de prolongement analytique qui se prêtent mieux à l'analyse. Les théorèmes taubériens interprètent ensuite l'information analytique obtenue sur ces derniers en information sur les problèmes du départ.

Une description précise des travaux réalisés sur ce thème se trouve dans l'appendice A.

Thématique 4 : Graphes de Cayley, G-graphes et groupes associés à un graphe (A. Faisant)

Les recherches récentes ont porté sur les girths, les graphes de Cayley et les G-graphes. Atuellement, en collaboration avec A. Bretto (Caen), Faisant s'intéresse aux groupes dits *agrafés*, associés à un graphe. Cette notion est liée aux formes quadratiques, aux systèmes de racines et aux

groupes de Coxeter.

Thématique 5 : Théorie additive des nombres et densités (G. Grekos)

Georges Grekos, en collaboration avec Rita Giuliano-Antonini (Pise) et, pour l'un des articles, avec Ladislav Misik (Ostrava), a poursuivi les recherches sur les densités d'ensembles d'entiers.

En collaboration avec Labib Haddad (Paris), Charles Helou (Pennsylvania State University) et Jukka Pihko (Helsinki), G. Grekos a poursuivi des recherches en théorie additive des nombres, en lien notamment avec la conjecture d'Erdős-Turan.

Une description précise des travaux réalisés sur ce thème se trouve dans l'appendice A.

Approximation diophantienne et géométrie

Membres : F. Foucault, F. Pellarin

Thématique 6 : Transcendance et approximation diophantienne (F. Pellarin)

Federico Pellarin a rejoint le LaMUSE en septembre 2007. Il s'intéresse à l'arithmétique et à l'approximation diophantienne et approfondit des problèmes venant de théories en caractéristique nulle (avec corps de base \mathbf{Q}) et non nulle (avec corps de base $\mathbf{K}=\mathbf{F}_q(\theta)$). Nous avons donc deux théories arithmético-diophantiennes, « classique » (sur \mathbf{Q}) et l'autre « drinfeldienne » (sur \mathbf{K}). A première vue, ces théories se ressemblent, comme plusieurs conjectures « folkloriques » le suggèrent. Beaucoup d'analogies sont en effet en grande partie issues du fait que les domaines \mathbf{Z} et $\mathbf{K}=\mathbf{F}_q[\theta]$ sont euclidiens. Cependant, dans les faits, on s'aperçoit de la présence de plusieurs différences importantes, dont voici deux exemples. On ne connaît pas à présent un résultat sur \mathbf{K} jouant un rôle raisonnablement proche de celui du théorème de Roth pour l'approximation rationnelle des nombres réels. En revanche, un résultat récent de Papanikolas implique, pour la fonction exponentielle de Carlitz (sur \mathbf{K}), un cas particulier de ce qu'on appelle « la conjecture de Shaniel drinfeldienne ». La conjecture de Shaniel classique (sur \mathbf{Q}) reste, quant à elle, complètement ouverte.

Ces asymétries entre théorie classique et théorie drinfeldienne ont été décrites en détail dans son séminaire Bourbaki 2007. Pellarin a depuis travaillé de façon intensive, et en partie en collaboration avec

V. Bosser (Caen), sur l'approximation algébrique des formes quasi-modulaires de Drinfeld, en découvrant d'autres importantes différences avec l'approximation algébrique des formes quasi-modulaires classiques, mais en indiquant une piste pour les interpréter, fournie par la théorie des A-motifs, qui pourrait s'étendre à l'approximation rationnelle des nombres algébriques dans le contexte drinfeldien.

Cette asymétrie entre contexte classique et contexte drinfeldien apparaît en fait très tôt dans le développement des théories. Tandis que l'on conjecture la normalité des expansions décimales des nombres algébriques irrationnels réels, les séries formelles irrationnelles algébriques dans $\mathbf{K}=\mathbf{F}_q[[1/\theta]]$ jouissent d'un tout autre comportement, puisque les suites de leur coefficients étant, d'après un théorème de Christol, engendrées par des automates finis, elles constituent des mots infinis à faible complexité. Autour de ces problèmes est ainsi né un groupe de travail à Lyon, coordonné par Adamczewski, Pellarin et Zamboni, entièrement consacré à l'approximation diophantienne et à la théorie des automates.

Thématique 7 : Géométrie arithmétique (F. Foucault)

Foucault s'occupe d'explicitier l'application de Kodaira-Spencer pour certaines familles de courbes algébriques. En collaboration avec Toffin (Caen), il a récemment mené à bien ce programme

dans le cas de familles à un paramètre de courbes hyperelliptiques de genre trois munies d'un point de Weierstrass rationnel [ACL63].

6. PROJET TRAS

Concernant le projet transversal TRAS nous développons des méthodes les plus efficaces de la résolution des équations intégrales de transfert radiatif. Ces équations proviennent de l'Astrophysique, et ont posées par le Groupe Transfert de l'Observatoire de Lyon.

La modélisation mathématique du problème de transfert se fait au moyen d'une équation intégrale définie sur un intervalle $[0, T]$ représentant une couche atmosphérique d'une étoile. Des problèmes numériques apparaissent comme conséquence de la singularité faible de l'opérateur intégral. Une autre particularité de cette équation est la longueur de l'intervalle d'intégration qui varie de valeurs d'ordre 1 à des valeurs "astronomiques" d'ordre 10 puissance 29.

Les méthodes habituelles sont extrêmement lentes dans ce cas. Donc, pour de grandes longueurs d'intervalle nous appliquons la méthode asymptotique "exprimée" sous la forme de décomposition partielle de l'intervalle d'intégration.

En fait, il s'agit d'une version de la méthode de décomposition asymptotique de domaine développée dans notre équipe (voir thème M4SF). Cette décomposition permet de réduire d'une manière très significative le nombre de nœuds dans le maillage numérique et accélérer les méthodes numériques [ACL., ACL.]. Pour la résolution du problème partiellement décomposé, on développe des méthodes spéciales d'approximation de l'équation intégrale asymptotiquement réduite.

On invite régulièrement le Professeur AMOSSOV de l'Institut de l'Energie de Moscou pour une collaboration scientifique. On travaille en coopération étroite avec le Groupe Transfert de l'Observatoire de Lyon.

La notion de singularité faible d'un noyau d'opérateur intégral a été définie de manière rigoureuse, avec des contraintes moindres par rapport à ce que la littérature spécialisée exige dans les cas d'application concernés par nos travaux. Avec les nouvelles hypothèses, des bornes d'erreur relative ont été établies pour des approximations par projection et par quadrature du type intégration produit. Complétés avec une nouvelle procédure de raffinement itératif, ces résultats ont permis de construire et valider des méthodes d'approximation utiles à des applications en Astrophysique. De nouvelles méthodes de l'accélération de convergence des méthodes itératives ont été proposées et justifiées dans [ACL 12].

APPENDICE A : description complémentaire des travaux des membres du thème « Théorie des nombres »

Thématique 1 : théorie additive et combinatoire des nombres

La question de l'existence d'une densité asymptotique pour les sommes de 3 cubes d'entiers positifs fait partie des problèmes les plus difficiles en théorie additive classique. Lorsqu'on s'intéresse à la représentation d'entiers en sommes de puissances, il est indispensable de tenir compte de deux types de phénomènes, ceux purement combinatoires et ceux purement arithmétiques. Selon la nature des puissances impliquées et leur nombre, la combinatoire et l'arithmétique interagissent différemment et ont une influence forte sur la fonction de représentation et par voie de conséquence sur la densité des entiers représentés. Pour se convaincre de cela, il suffit de considérer les sommes de carrés : d'un strict point de vue combinatoire, les couples de deux carrés sont suffisamment nombreux pour espérer obtenir une densité strictement positive pour les sommes de deux carrés. Cependant, les carrés étant mal répartis dans les progression arithmétiques, il s'avère que cette densité est nulle. Pour les sommes de trois cubes, la situation est moins claire. On sait que les sommes de 4 cubes représentent presque tous les entiers (Davenport, 1939) et que la suite des

sommes de trois cubes est asymptotiquement riche. Dans [ACL52], nous montrons que notre modèle probabiliste pour les sommes de puissances permet d'accréditer la théorie que les sommes de trois cubes ont une densité, dont nous donnons une expression conjecturale et une approximation numérique. Cette expression conjecturale de la densité met en évidence la manière dont le comportement asymptotique des cubes et leur répartition dans les progressions arithmétiques interagissent. En outre, ces résultats sont soutenus par les calculs et simulations numériques effectués à cet effet.

La fonction de Brakemeier, d'arguments n et k entiers, est définie comme étant la longueur minimale d'une suite d'entiers rencontrant exactement k classes modulo n et possédant une sous-suite de n termes de somme nulle. L'étude de cette fonction est un prolongement naturel des résultats obtenus antérieurement autour du théorème d'Erdős-Ginzburg-Ziv (1961). Pour expliciter les valeurs de cette fonction, on dispose d'outils additifs efficaces notamment lorsque n est un nombre premier. Dans [ACL89] et [ACL92], nous établissons de nouvelles valeurs de cette fonction et proposons une conjecture que nous résolvons partiellement en se basant sur le théorème de Roth sur les triplets en progression arithmétique.

Les carrés, les cubes, les nombres premiers, etc, constituent ce que l'on appelle une base additive, à savoir un ensemble d'entiers naturels qui représentent lorsqu'on en additionne un nombre suffisant uniformément borné tous les entiers. Ce nombre peut être pris égal à 4 pour les carrés (Lagrange, 1770), 9 pour les cubes (Wieferich, 1909) et 7 pour les nombres premiers. Ce type de question trouve des extensions en lien avec la théorie de Ramsey. Une base additive B dont on colore les éléments selon k couleurs, est-elle une base additive monochromatique, c'est-à-dire, chaque entier n est-il somme d'un nombre (ne dépendant que B et de k) fixe d'éléments de même couleur de la base ? Nous apportons dans [ACL85] une réponse affirmative et qualitative à cette question de Sárközy (Budapest).

Dans [Hegyvari, Hennecart, Plagne : A proof of two Erdős' conjectures on restricted addition and further results, J. Reine Angew. Math. (2003)], les auteurs établissent de manière effective que pour une suite A d'entiers positifs telle que la densité inférieure de $hA = A + A + \dots + A$ (h fois) est strictement positive, alors celle de $h^*A = A^*A^*\dots A^*$ (addition restreinte) est également strictement positive. Une autre question due à Erdős et Burr était de savoir si une suite A est telle que la suite hA a des trous uniformément bornés, alors il en est de même de h^*A . Nous montrons dans [ACL86] qu'il n'en est rien. La notion d'addition restreinte est également intéressante lorsqu'on s'intéresse aux bases. Dans [ACL90], on montre que lorsque A est une base asymptotique d'ordre 2, c'est-à-dire si $(A+A) \setminus \mathbf{N}$ est un ensemble fini, alors $4^*A \setminus \mathbf{N}$ est également fini. On construit également une base additive B d'ordre 2 telle que $\mathbf{N} \setminus 3^*B$ est infini, ce qui montre l'optimalité du facteur 4 dans le résultat précédent. Ces résultats complètent des résultats antérieurs dûs à Kelly (1953) sur le sujet, et pour lesquels aucune amélioration n'avait été apportée depuis.

Grâce à des progrès remarquables réalisés par plusieurs mathématiciens, le domaine des mathématiques consacré à la *combinatoire additive* a connu ces dernières années un puissant développement (Ruzsa, Tao, Vu, Bourgain, Green, Gowers). Le type de questions qui nous intéressent est d'établir des liens entre les cardinaux de la différence $A-B$, de la somme $A+B$ ou encore des sommes itérées hB lorsque A et B sont des sous-ensembles finis d'un groupe additif. Dans [ACL81], nous montrons entre autres choses que $A-B$ peut être de cardinal logarithmiquement strictement supérieur à celui de $A+B$. Sous la contrainte supplémentaire d'avoir $|A+B| < K|A|$, on montre aussi que pour tout sous-ensemble X de A , le rapport $|X-B|/|X|$ est majoré logarithmiquement par $(\ln|A|)^{1/2}$. Ce dernier résultat est en rapport avec les inégalités de Plünnecke-Ruzsa qui implique l'existence d'un X tel que $|X+2B|/|X|$ est uniformément borné (en fonction de K).

Des travaux récents portent sur la notion d'expandeurs et d'extracteurs. Un expandeur est une fonction (polynomiale) f en deux variables telle que pour tout nombre premier p assez grand et toute paire de sous-ensembles A et B de classes modulo p , $|f(A,B)|/\max(|A|,|B|)$ tend vers l'infini quand p, A, B grossissent. Faisant suite à des travaux de Bourgain notamment, nous construisons dans [ACL83] des familles d'extracteurs et d'expandeurs. Nous utilisons pour cela un théorème d'incidence dû à Bourgain, Katz et Tao.

Pour X une partie d'un groupe G , on peut définir l'ensemble $\Gamma(X)=aX+bX$ constitué des éléments de G du type $ax+by$, x et y dans X . Stewart, Tidjeman et Ruzsa se sont intéressés à la stationnarité de la suite $(\Gamma^n(X))_n$, lorsque $a=1$ et $b=-1$. Dans [ACL84], nous avons obtenu des résultats du même type pour la suite des itérés d'une partie X d'un groupe σ -finis de densité positive. Dans [ACL87], on considère une question analogue mais où la suite des itérés est fabriquée à partir de transformations linéaires différentes. On obtient également un résultat de stabilité pour cette suite.

Thématique 3 : Séries de Dirichlet, fonctions zêta et applications

Dans la continuité de ses précédents travaux sur les séries de Dirichlet associées à plusieurs variables, durant cette période D. Essouabri a obtenu en collaboration avec son ancien étudiant Marc de Crisenoy de nouveaux résultats [ACL48] sur les valeurs spéciales aux entiers négatifs des séries de Dirichlet multiples associées à plusieurs polynômes de plusieurs variables. Il a aussi obtenu récemment (« On a class of multiple zeta functions associated to linear recurrence sequences », avec K. Matsumoto et H. Tsumura, soumis) le prolongement méromorphe ainsi que les relations entre les valeurs aux entiers négatifs d'une nouvelle classe de fonctions zêta associées aux suites récurrentes.

La géométrie arithmétique et plus particulièrement la conjecture de Manin concernant la répartition des points rationnels sur les variétés algébriques ainsi que l'étude des domaines maximaux de méromorphie de produits eulériens ont motivé plusieurs travaux dont [ACL56] et [ACL24].

Dans [ACL56], D. Essouabri a obtenu des résultats précis sur les prolongements méromorphes de fonctions zêta des hauteurs. Il a montré en particulier dans la deuxième partie de ce travail que dans le cas du plan projectif éclaté en un point, les fonctions zêta de hauteurs associées aux fibrés en droite dont les classes sont à l'intérieur du cône des diviseurs effectifs possèdent des prolongements méromorphes à tout le plan complexe. Comme application, il a obtenu dans ce cas le deuxième terme en log apparaissant dans la conjecture de Manin. C'est la première fois que ce second terme est explicite. Il est à noter que depuis ce second terme a été aussi explicité par La Bretèche et Sir Swinnerton-Dyer, dans le cas de la cubique singulière $X_1X_2X_3=X_0^3$.

Dans [ACL24] (en collaboration avec B. Lichtin et G. Bhowmik), D. Essouabri a étendu au cas multivariés un résultat d'Estermann sur le prolongement et les domaines maximaux de produits eulériens. De façon plus précise, ils ont obtenu le prolongement méromorphe et un critère à la Estermann (sur l'existence d'un prolongement méromorphe à tout l'espace) de produits eulériens de la forme $Z(s_1, \dots, s_n) = \prod_p W(p^{-s_1}, \dots, p^{-s_n})$ où W est un polynôme à n variables et à coefficients entiers. Comme application, ils ont obtenu des résultats précis sur la répartition des points rationnels sur certaines hypersurfaces projectives singulières.

D. Essouabri encadre aussi depuis octobre 2006, la thèse de Mr Ludovic Delabarre sur les domaines maximaux de méromorphie de produits eulériens multivariés. Mr Ludovic Delabarre a obtenu récemment dans le cadre de sa thèse des résultats nouveaux et intéressants sur les domaines maximaux de prolongement méromorphe de produits eulériens associés à des polynômes de plusieurs variables. Ces résultats généralisent une partie des résultats de [ACL24]; i.e. il donne une description plus précise des domaines maximaux de méromorphie de ces produits eulériens.

Dans [«Meromorphic continuation and natural boundaries of a class of Estermann's generalized eulerian products», avec O. Velasquez, soumis], D. Essouabri a exhibé des classes de produits eulériens possédant des domaines maximaux de méromorphie très irréguliers. Ce travail résume un chapitre de la thèse que Mr O. Velasquez a soutenue à l'Université de Bordeaux 1 en septembre 2008.

Dans [«On mean values of multivariable arithmetic functions», soumis], D. Essouabri a obtenu des résultats sur les fonctions de comptage associées aux fonctions arithmétiques multiplicatives multivariées. Il donne de plus des applications à plusieurs problèmes de comptage,

en particulier à l'étude de l'effet de changement de métriques sur la constante volume qui apparaît dans la conjecture de Manin citée ci-dessus. Ces résultats sont obtenus comme une conséquence d'une étude fine et par une nouvelle méthode du prolongement méromorphe d'une nouvelle classe de fonctions zêta associées à des fonctions de plusieurs variables.

D. Essouabri a élargi ses intérêts vers l'informatique théorique. L'article [ACL57] est une première contribution à ce sujet. Ce travail met en évidence, via une étude spectrale, plusieurs propriétés arithmético-fractales du triangle de Pascal modulo un nombre premier p . Cet ensemble intervient dans l'étude des automates et est lié au nombre d'apparitions d'un chiffre donné dans l'écriture des entiers en base p . Il encadre aussi actuellement en collaboration avec Brigitte Vallée (Dr de recherche CNRS, Labo. Informatique de l'Univ. De Caen) la thèse de M. Roux sur le thème : « Les séries de Dirichlet et l'analyse en moyenne des algorithmes de réduction de réseaux ».

D. Essouabri a aussi travaillé dans le domaine de la Physique théorique et la géométrie non commutative. Sa collaboration avec deux chercheurs du centre de Physique théorique de Marseille (B. Iochum et C. Levy) et A. Sitarz de l' Institut de Physique (Jagiellonian University, Cracow, Pologne), a été couronnée par un article de 70 pages [ACL58] dans lequel ils ont obtenu l'action spectrale sur le tore non commutatif en utilisant une formule de Chamseddine–Connes et en établissant le prolongement méromorphe et holomorphe de plusieurs familles de fonctions zêta spectrales dans ce contexte non commutatif.

Ces travaux ont donné lieu à plusieurs invitations de D. Essouabri :

- "Zeta Functions Conference" (du 18 au 22 septembre 2006, Moscou, Russie) (Organisateurs : M. Balazard et M. Tsfasman);
- "Analytic Number Theory Conference" (du 11 au 13 octobre 2006, RIMS, Kyoto, Japan) (Organisateur : S. Egami);
- « Journées autour des séries de Dirichlet » (du 13 au 14 Novembre 2007, Lille, France) (Organisatrice : G. Bhowmik);
- "Zeta Functions Conference II" (du 1er au 5 décembre 2008, Moscou, Russie) (Organisateurs : M. Balazard et M. Tsfasman);
- « Special Session on Fractal Geometry, Dynamical Systems, Number Theory and Analysis on Rough Spaces » AMS meeting (du 7 au 8 novembre 2009, Californie, USA); (organisateurs : Michel L. Lapidus, Hung Lu, Erin P. J. Pearse);
- « Second International Workshop on zeta functions in algebra and geometry » (3 au 7 mai 2010, Palma de Mallorca, Espagne) (<http://www.singacom.uva.es/seminarios/WorkshopMA/home.html>) Organisateurs : A. Melle-Hernández (Espagne), W. Veys (Belgique), W. A. Zúñiga-Galindo (Mexique). (Comité scientifique : A. Campillo (Espagne), J. Denef (Belgique), F. Grunewald (Allemagne), S. M. Gusein-Zade (Russie), M. Larsen (USA), I. Luengo (Espagne), Y. Tshinkel (USA), A. Yukie (Japon).
- K. Matsumoto et H. Tsumura ont exposé leur dernier travail en commun avec Driss Essouabri lors de la session 2009 (mars) de la Société Mathématique Japonaise;

Thématique 5 : Théorie additive des nombres et densités

Article [ACL68] : extension de la loi de Benford (loi du premier chiffre significatif) à des ensembles définis par leur fonction de comptage. Ceci généralise un résultat connu pour les nombres premiers. Le résultat est ainsi valable, entre autres, pour les carrés et pour les puissances en général.

Article [ACL70] : continuité et monotonie des densités définies à l'aide des poids avec paramètre un exposant α . Les cas $\alpha=0$ et $\alpha=-1$ correspondent aux densités usuelles, asymptotique et logarithmique, respectivement.

Article [ACL69] : introduction et étude de la densité uniforme (ou de Banach) avec poids associé à chaque entier positif.

Article [ACL67] : Comparaison des densités étudiées dans l'article cité (Czechoslovak Mathematical Journal, 57 (2007), 947-962) et des densités de Dirichlet, définies comme limites d'intégrales.

G. Grekos a écrit aussi deux articles d'exposition sur les densités [ACL75] et [ACL76] qui correspondent à des exposés au « Workshop on the Density Concept » (Bratislava, 2004) <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/density/> et un autre sur quelques problèmes ouverts concernant les densités (« Open problems on densities ». Actes de « International Conference on Number Theory and Cryptography » (Allahabad, India, February 23- 27, 2007), 10 pp., Hindusthan Book Agency, New Delhi; à paraître).

En collaboration avec Labib Haddad (Paris), Charles Helou (Pennsylvania State University) et Jukka Pihko (Helsinki), G. Grekos a poursuivi des recherches en théorie additive des nombres.

Article [ACL78] : sur les ensembles qui vérifient la condition « d'Erdős-Turan », c'est-à-dire que le n -ième élément ne dépasse pas $C(n\text{-carré})$. On étudie comment ces ensembles se comportent par addition. Cette étude est étendue à la somme de deux ensembles [ACL79], ce qui a permis de donner une nouvelle preuve et des perspectives à un résultat de J.W.S. Cassels (1957). Dans une autre direction, ils ont répondu partiellement à un problème posé par Erdős et Sarkozy: ils ont prouvé qu'un ensemble A d'entiers positifs ne peut être à la fois « base d'ordre 3 » (tout entier positif est somme de 3 éléments de A) et « ensemble de Sidon » (tout entier n admet au plus une représentation $n=a+b$, avec a et b appartenant à A).

Oto Strauch (Académie des Sciences de Bratislava) et G. Grekos dans [ACL73] ont abordé et résolu partiellement certaines questions concernant la distribution des rapports a/b , a et b appartenant à un ensemble A d'entiers positifs, en relation avec les propriétés (telles que la densité, par exemple) de A .

A. Faisant, G. Grekos et V. Toma (Université Comenius, Bratislava), dans [ACL59] ont étendu le lien connu entre variation et convergence d'une suite, à la variation dite "statistique" (à des indices de densité zéro près) d'une suite et sa convergence statistique.

Dans [ACL74], G. Grekos présente des travaux récents de J. Cassaigne et A. Plagne sur des problèmes posés par lui-même.